

LNF - 63/70  
12.11.1963.

E. Ferlenghi e L. Mango: CALCOLI PER L'OTTICA DI TRASPORTO  
DEI POSITRONI NELL'ACCELERATORE LINEARE DI FRASCATI. -

Nota interna: n. 218

LNF - 63/70

Nota interna: n. 218  
11.11.1963.

E. Ferlenghi e L. Mango: CALCOLI PER L'OTTICA DI TRASPORTO  
DEI POSITRONI NELL'ACCELERATORE LINEARE DI FRASCATI.

1. Il presente lavoro si propone lo studio del rendimento di un sistema ottico per il trasporto di fasci di positroni da una targhetta - convertitore attraverso l'acceleratore lineare ad un anello di accumulazione. Le considerazioni qui svolte sono basate essenzialmente su calcoli preliminari eseguiti da F. Amman e R. Andreani<sup>(1)</sup> e dai tecnici della Varian Ass.<sup>(2)</sup>.

I fasci di positroni sono ottenuti facendo incidere su una targhetta - convertitore fasci di elettroni. Conseguentemente, anche prescindendo dalle caratteristiche del fascio di elettroni incidente, la sorgente estesa di positroni presenterà certe distribuzioni in energia, momento trasverso e coordinate spaziali. Queste correnti di positroni sono poi introdotte in un acceleratore lineare. Si tratta, perciò, di trovare le condizioni ottime, per dati parametri del fascio di positroni, affinché il maggior numero di particelle uscenti dalla sorgente venga accettato dal linac e accelerato.

Al fine di diminuire lo spread dei momenti trasversi delle particelle all'uscita del convertitore, e quindi per migliorare l'accettazione del linac, è stato proposto di inserire tra la targhetta e il linac una lente magnetica di adattamento.

L'insieme di questa lente e del linac può essere as

2.

similato ad un sistema ottico per il trasporto dei fasci di positroni. Entro i limiti di approssimazione che precisereмо nel seguito il comportamento delle particelle nel sistema ottico può essere schematizzato facendo riferimento ai due fattori che principalmente influiscono sull'acquetanza del sistema. Dapprima sono da considerarsi le perdite da parte del fascio dovute al fatto che certe particelle nel loro moto finiscono sulle pareti del sistema. E, una volta determinato in questo modo il rendimento "geometrico" del sistema ottico, si dovrà stabilire la percentuale di particelle aventi parametri (energia, momento trasverso) tali da potere essere accelerate nell'anello di accumulazione.

Il calcolo risulta quindi costituito da due parti: nella prima, partendo dalle equazioni del moto di una particella nei campi presenti nel sistema ottico e dalle caratteristiche geometriche del sistema stesso, si giunge a stabilire se la traiettoria della particella rimane o meno completamente all'interno della regione spaziale ritenuta utile.

Nella seconda parte si introducono gli effetti di sfasamento della particella accelerata nel sistema ottico rispetto all'onda della radiofrequenza, responsabile della accelerazione, in conseguenza del moto elicoidale della particella. Tale sfasamento comporta una diversa accelerazione per particelle aventi caratteristiche diverse e quindi la formazione di uno spread di energie, che si sovrappone a quello iniziale delle particelle del fascio uscente dalla targhetta - convertitore. Importante, ai fini dell'iniezione in un anello di accumulazione, è conoscere la percentuale di particelle che hanno energia compresa entro una banda assegnata e momento trasverso minore di un valore-limite, che riescano utili.

Difficoltà analitiche della prima parte del calcolo e ragioni di comodità per la seconda parte hanno consigliato di adottare il metodo di Monte Carlo, che del resto si adatta molto bene al carattere del problema trattato.

2. Il sistema ottico adottato per raccogliere ed accelerare i positroni è quello descritto in (1). Esso è cioè costituito da una lente magnetica di adattamento (A) che ha il compito di diminuire il momento trasverso delle particelle uscenti dal convertitore e, di seguito, dai solenoidi avvolti sulla guida acceleratrice, che noi schematizzeremo con un unico solenoide (S).

Passiamo a trattare separatamente gli effetti dei vari elementi del sistema sulla dinamica della particella generica. Avendo cura di centrare l'asse z sull'asse del fascio in uscita dal convertitore C e sugli assi di simmetria di A e di S (v. Fig. 1), possiamo caratterizzare la

particella generica al momento di lasciare il convertitore con le "coordinate"  $\varrho, \varphi$  (corrispondentemente  $x, y$ ) nel piano perpendicolare all'asse di simmetria (v. Fig.2);  $\mathcal{E}$ , energia;  $\vartheta$ , angolo formato dalla direzione d'uscita della particella con l'asse di simmetria (v. Fig.1);  $\alpha$ , angolo secondo cui si distribuisce il momento trasverso della particella lungo, p. es., gli assi  $x, y$  (v. Fig.2).

Risulta però chiaro che per ragioni di simmetria del sistema in tutti i calcoli gli angoli  $\alpha$  e  $\varphi$  devono comparire in espressioni del tipo  $(\alpha + \varphi)$ , per cui ovunque si può porre  $\varphi = 0$  e limitarsi ai parametri  $\varrho, \mathcal{E}, \vartheta, \alpha$ .

Limitando la trattazione al caso di particelle relativistiche, l'impulso trasverso sarà dato da

$$(2.1) \quad p_{\perp} \approx \frac{\mathcal{E}}{c} \vartheta$$

mentre quello longitudinale sarà

$$(2.2) \quad p_{\parallel} \approx \frac{\mathcal{E}}{c}$$

a) Se la lente A crea un campo magnetico assiale  $H_A$ , uniforme si deduce il moto delle particelle, che è così espresso in coordinate cartesiane:

$$(2.3) \quad \begin{cases} x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha) \\ y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha) \\ z = \frac{c^2}{\mathcal{E}} p_{\parallel} t \approx ct \end{cases}$$

$$(2.4) \quad \begin{cases} p_x = p_{\perp} \cos(\omega t + \alpha) \\ p_y = -p_{\perp} \sin(\omega t + \alpha) \\ p_z = \text{const} \end{cases}$$

Con  $(x_0, y_0)$  abbiamo indicato le coordinate dell'intersezione tra il piano della sorgente e l'asse attorno al quale spiralizza la particella; con  $r$  il raggio dell'elica, con  $\omega$  la frequenza, che sono così esprimibili(x)

$$(2.5) \quad r = \frac{c p_{\perp}}{e H_A} = \frac{\mathcal{E} \vartheta}{e H_A}$$

---

(x) - Nel sistema di unità di Gauss, che è adottato in tutto il lavoro.

4.

$$(2.6) \quad \omega = \frac{e c H_A}{E}$$

( $c$  = velocità della luce;  $e$  = carica dell'elettrone).

Poichè si considera che il convertitore sia posto immediatamente all'imbocco della lente di adattamento A, ogni particella secondo le sue caratteristiche iniziali  $\rho, \epsilon, \varphi, \alpha$  percorrerà in A una spirale, senza risentire della zona di fringing all'ingresso di A.

Fissiamo ora una certa energia E compresa fra quei valori che può assumere  $\epsilon$ . Le particelle di energia E spiralizzano con frequenza

$$\bar{\omega} = \frac{e c H_A}{E}$$

Associato a  $\bar{\omega}$  si può definire un tempo T/2 ("semiperiodo"):

$$(2.7) \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi E}{e c H_A}$$

dopo il quale il punto rappresentativo della particella di energia E nel piano trasverso ha percorso una semicirconferenza.

Le coordinate della particella generica al tempo T/2 saranno (v. (2.3), (2.4), quando si introducono la (2.6) e (2.7)):

$$(2.8) \quad \begin{cases} \underline{x} = x_0 + r \sin(\pi \frac{E}{\epsilon} + \alpha) \\ \underline{y} = y_0 + r \cos(\pi \frac{E}{\epsilon} + \alpha) \\ \underline{z} = \frac{\pi E}{e H_A} \end{cases}$$

$$(2.9) \quad \begin{cases} \underline{p}_x = p_0 \cos(\pi \frac{E}{\epsilon} + \alpha) \\ \underline{p}_y = -p_0 \sin(\pi \frac{E}{\epsilon} + \alpha) \\ \underline{p}_z = \frac{E}{c} = \text{const} \end{cases}$$

Se noi perciò scegliamo la lunghezza di A esattamente uguale a  $\underline{z}$  definito in (2.8), risulta dalle (2.8) che alla uscita da A, le particelle con  $\epsilon = E$  percorrono nel piano perpendicolare all'asse di simmetria del sistema un arco pari a  $\pi$ ; quelle con  $\epsilon < E$  un arco maggiore di  $\pi$ ; quelle con  $\epsilon > E$  un arco minore di  $\pi$ .

b) Passiamo ora a considerare l'azione sulla parti-

cella del campo magnetico disperso ai bordi di A. Se il tratto in questione (zona di fringing) è abbastanza corto rispetto alla lunghezza di A e compreso tra  $z_1$  e  $z_2$  (v. Fig. 1), potremo scrivere per una certa distanza  $a$  dall'asse di simmetria

$$\pi a^2 H_A = 2\pi a \int_{z_1}^{z_2} H_a dz$$

ossia

$$(2.10) \quad \int_{z_1}^{z_2} H_a dz = \frac{a H_A}{2}$$

avendo indicato con  $H_a$  il campo trasverso nella zona di fringing.

Sulla particella in questa zona agisce una forza

$$\vec{F} = \frac{ec}{\varepsilon} \vec{p} \wedge \vec{H}_a$$

Interessandoci alle sole componenti sul piano trasverso, avremo per la particella degli incrementi di impulso

$$\Delta p_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt$$

e sostituendo in base all'uguaglianza  $z = ct$

$$\Delta p_x = \frac{1}{c} \int_{z_1}^{z_2} F_x dz = -\frac{e}{\varepsilon} p_z \int_{z_1}^{z_2} H_a^y dz$$

Dalla Fig. 3 ricaviamo  $H_a^y = \sin \gamma H_a$ , essendo contemporaneamente

$$(2.11) \quad a \sin \gamma = \underline{y}$$

Perciò

$$\Delta p_x = -\frac{e}{\varepsilon} p_z \sin \gamma \int_{z_1}^{z_2} H_a dz$$

e per la (2.10)

$$\Delta p_x = -\frac{e}{\varepsilon} p_z \sin \gamma \frac{a H_A}{2}$$

Tenendo conto di (2.11) e di (2.2) abbiamo infine

6.

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_x = -\frac{e}{c} \frac{H_A}{2} y \\ \text{e analogamente} \\ \Delta p_y = \frac{e}{c} \frac{H_A}{2} x \end{array} \right.$$

Questi sono gli impulsi trasversi ricevuti dalla particella nella zona di fringing all'uscita di A, mentre ammetteremo che le coordinate spaziali  $(x, y)$  non subiscano variazioni in questo breve tratto.

c) Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente valgono anche per la zona di fringing all'ingresso del solenoide S. Solo che ora gli impulsi trasmessi alla particella avranno il segno inverso.

Quindi l'impulso trasverso che in totale la particella riceve attraversando il tratto che separa A da S avrà come componenti

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Delta p_x} = -\frac{e}{2c} (H_A - H_S) y \\ \overline{\Delta p_y} = \frac{e}{2c} (H_A - H_S) x \end{array} \right.$$

dove  $H_S$  è il campo magnetico all'interno di S, e  $(x, y)$  sono definite dalle (2.8).

Poichè anche nella zona di fringing di S ammetteremo che le coordinate spaziali restino immutate, le nuove condizioni "iniziali" della particella, al momento cioè di entrare in S, saranno le (2.8) per ciò che riguarda le coordinate spaziali  $(x, y)$ , mentre gli impulsi, che indicheremo con  $\tilde{p}_x$  e  $\tilde{p}_y$ , saranno dati dalle somme dei termini corrispondenti della (2.9) e della (2.13).

d) Riguardo all'azione prodotta dal campo magnetico  $H_S$  del solenoide S ci interessa notare per il momento che anche qui è possibile definire, similmente a quanto è espresso nelle (2.3) e (2.5), un nuovo raggio di spiralizzazione  $\tilde{r}$  e le coordinate del nuovo centro di spiralizzazione della particella. Per essi si ricavano facilmente le seguenti relazioni:

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_0 = x + \frac{c}{e H_S} \tilde{p}_y \\ \tilde{y}_0 = y - \frac{c}{e H_S} \tilde{p}_x \end{array} \right.$$

per le coordinate del centro di spiralizzazione in S; e

$$(2.15) \quad \tilde{r} = \frac{c}{2H_s} \tilde{p}_t$$

dove

$$\tilde{p}_t^2 = \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2$$

per il raggio di spiralizzazione in S.

3. Il calcolo dei coefficienti d'accettazione del sistema ottico è suddiviso in due momenti: il primo consiste nello scegliere a caso da una certa distribuzione, che ora discuteremo, le caratteristiche iniziali della particella; il secondo nel seguire il moto della particella, descritto nel punto 2, e nello stabilire in base a criteri che definiremo se essa è stata accettata dal sistema oppure se deve considerarsi perduta ai fini dell'ulteriore sua accelerazione.

a) Sulla distribuzione delle particelle all'uscita dal convertitore si sono fatte le seguenti ipotesi:

- Indipendentemente dagli altri parametri, la distribuzione dei positroni in energia è uniforme in una zona di energie intorno al valore E (v. 2a). Quindi si farà variare  $\mathcal{E}$  da  $E - \Delta E$  ad  $E + \Delta E$ . Tale assunzione non richiede particolari giustificazioni semprechè  $\Delta E$  sia abbastanza piccolo;
- sia uniforme il numero di positroni uscenti per unità di angolo solido, sia cioè

$$\frac{dN}{d\omega} = \text{const}$$

- sia uniforme la distribuzione spaziale (nel piano x,y) all'interno di una generica corona circolare di raggi  $T_1$  e  $T_2$ , con  $T_1 < T_2$ , dove eventualmente può essere  $T_1 = 0$  (v. Fig. 2).

Anche queste assunzioni sembrano ragionevoli entro i limiti di apertura angolare e di estensione del fascio di positroni con cui si ha a che fare in pratica.

Da ciò segue che i parametri della particella devono essere scelti a caso dalla funzione di distribuzione

$$(3.1) \quad f(\rho, \mathcal{E}, \vartheta, \alpha) = \text{const } \rho \vartheta$$

dato che



8.

$$\begin{aligned}
 dN &= \text{const } \rho \, d\rho \, d\varepsilon \, d\omega = \\
 &= \text{const } \rho \, d\rho \, d\varepsilon \, \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha \approx \\
 &\approx \text{const } \rho \, d\rho \, d\varepsilon \, \vartheta \, d\vartheta \, d\alpha
 \end{aligned}$$

valendo per le variabili questi limiti:

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 \leq \rho \leq T_2 \\ \varepsilon - \Delta\varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon + \Delta\varepsilon \\ 0 \leq \vartheta \leq \Theta \ll 1 \\ 0 \leq \alpha < 2\pi \end{array} \right.$$

La scelta a caso dei parametri è eseguita col metodo Monte-Carlo.

b) Una volta scelti i parametri  $(\rho, \varepsilon, \vartheta, \alpha)$  di una particella, seguendone la dinamica si stabilisce se essa rimane geometricamente all'interno del sistema dell'ottica di trasporto oppure se ne fuoriesce.

Per far ciò si devono tenere presenti, nel caso della lente A, le osservazioni fatte in (2.a). Poichè le particelle di energia  $\varepsilon < E$  avranno percorso un arco maggiore di  $\pi$  al momento di lasciare A, affinché esse siano accettate da A basterà imporre che entro A (e quindi entro il raggio  $R_A$  della lente) rimanga il punto di distanza massima delle particelle dell'asse di simmetria del sistema. Tale condizione si può perciò esprimere nel modo seguente

$$(3.3) \quad r + \rho_0 < R_A$$

dove  $r$  è definito dalla (2.5) e  $\rho_0$  è la distanza dell'asse di spiralizzazione dall'asse di simmetria, che si può desumere dalle (2.3) e risulta essere

$$(3.4) \quad \rho_0 = (\rho^2 + r^2 - 2r\rho \sin\alpha)^{1/2}$$

Le particelle aventi un'energia  $\varepsilon > E$  compiono nel piano trasverso un arco minore di  $\pi$  e di conseguenza esse vengono a trovarsi alla massima distanza dall'asse di simmetria proprio al momento di uscire dalla lente A. Per queste particelle basterà richiedere ai fini dell'accettazione, che sia minore di  $R_A$  la distanza dall'asse al momento  $T/2$  (v. 2.7), ossia:

$$\underline{\rho} \equiv (\underline{x}^2 + \underline{y}^2)^{1/2} < R_A$$

dove  $x$ ,  $y$  sono definite dalle (2.8). Per esteso tale condizione viene scritta:

$$(3.5) \quad \left\{ \rho_0^2 + r^2 + 2r \left[ \rho \sin \left( \pi \frac{E}{\varepsilon} + \alpha \right) - r \omega \pi \frac{E}{\varepsilon} \right] \right\}^{1/2} < R_A$$

dove tutti i simboli sono già stati definiti. Quindi soltanto se la particella soddisfa alla condizione (3.3) (se la sua energia  $\varepsilon < E$ ) o alla (3.5) (se  $\varepsilon > E$ ) la si considererà accettata dalla prima parte dell'ottica di trasporto; altrimenti la si considera perduta ai fini della accelerazione.

c) Poichè dopo aver attraversato le zone di fringing la particella accettata da A avrà assunto un nuovo impulso, il moto di spiralizzazione all'interno del solenoide S avrà nuove caratteristiche che sono definite dalle (2.14) (da cui si può dedurre  $\tilde{\rho}_0 \equiv (\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2)^{1/2}$ ) e dalla (2.15).

Dato che S si presume essere abbastanza lungo per modo che tutte le particelle percorrono in esso un arco maggiore di  $2\pi$ , la condizione di accettazione per S è che la massima distanza della particella dall'asse di simmetria sia inferiore a  $R_S$ , raggio di S. E cioè deve essere

$$(3.6) \quad \tilde{r} + \tilde{\rho}_0 < R_S$$

dove  $\tilde{r}$  è il raggio di spiralizzazione in S definito dalla (2.15),  $\tilde{\rho}_0$  è la distanza dell'asse di spiralizzazione dall'asse di simmetria desumibile dalle (2.14). Per esteso abbiamo

$$(3.7) \quad \tilde{r}^2 = \frac{1}{H_S^2} \left\{ H_A^2 r^2 + \frac{1}{4} (H_A - H_S)^2 (x^2 + y^2) - H_A (H_A - H_S) r \left[ r - r \omega \pi \frac{E}{\varepsilon} + \rho \sin \left( \pi \frac{E}{\varepsilon} + \alpha \right) \right] \right\}$$

e

$$(3.8) \quad \tilde{\rho}_0^2 = \frac{H_A}{H_S} (x^2 + y^2) + \tilde{r}^2 - \frac{2H_A}{H_S} r \left[ r + \rho \sin \left( \pi \frac{E}{\varepsilon} + \alpha \right) - r \omega \pi \frac{E}{\varepsilon} \right]$$

dove tutti i simboli sono definiti.

Geometricamente accettate dall'intero sistema ottico saranno quelle particelle che soddisferanno alle condizioni (3.3) (oppure 3.5) e (3.6).

d) IL calcolo può essere schematizzato con il diagramma a blocchi di Fig.4.

Il blocco "Caratteristiche della particella accettata" sta a schematizzare la trascrizione (perforazione di scheda) di alcuni parametri della particella di cui ci serviremo nella seconda parte del lavoro. Questi parametri sono: l'energia iniziale  $\epsilon$ , l'angolo iniziale  $\psi$  della direzione di moto rispetto all'asse di simmetria, e lo stesso angolo, misurato all'ingresso del solenoide S,  $\tilde{\psi}$  e che si esprime così:

$$(3.9) \quad \tilde{\psi} = \frac{e H_S}{\epsilon} \tilde{r} .$$

4. Con il programma descritto dallo schema a blocchi del paragrafo precedente abbiamo eseguito sul calcolatore IBM 1620 dei Laboratori di Frascati una serie di calcoli i cui risultati sono riportati nella tabella I.

I casi trattati differiscono per il valore di almeno uno dei seguenti parametri:

- $R_A, R_S$ , rispettivamente raggio della lente A e del solenoide S;
- $T_1, T_2$ , raggi interno ed esterno della corona circolare di convertitore, delimitanti la sorgente di positroni;
- $H_A, H_S$ , campi magnetici della lente A e del solenoide S.

Ovunque si è assunto che l'angolo d'emissione  $\psi$  dei positroni potesse variare tra 0 e un angolo massimo  $\psi = 0,5$  rad e che l'energia  $\epsilon$  fosse compresa nell'intervallo  $E - \Delta E$ ,  $E + \Delta E$  con  $E = 10,5$  MeV e  $\Delta E = 2,5$  MeV.

Con  $N_0$  abbiamo indicato il numero di particelle uscenti dal convertitore e trattate nel calcolo. E' evidente che  $N_0$ , a meno di un fattore di proporzionalità costante (v. la distribuzione 3.1), rappresenta il numero effettivo di particelle uscenti dalla targhetta ed è altresì chiaro che, a parità di bande di energia ( $\epsilon$ ) angolo ( $\psi$ ) e coordinate spaziali ( $\rho$ ), una sempre migliore approssimazione della distribuzione (3.1) può essere ottenuta aumentando il valore di  $N_0$ . A questo proposito si può osservare che, essendo gli errori statistici del metodo Monte Carlo proporzionali a  $1/\sqrt{N_0}$ , l'errore dei risultati del presente calcolo possono essere ritenuti largamente inferiori al 10%.

Delle  $N_0$  particelle-campione scelte in uscita dalla targhetta soltanto  $N_1$  vengono accettate geometricamente dalla lente A e solo  $N_2$  dal solenoide S (vedi le corrispondenti colonne in tabella I).  $N_1/N_0$  e  $N_2/N_0$  rappresentano perciò le frazioni di particelle che sopravvivono dopo il passaggio in A e alla fine dell'acceleratore lineare, rispettivamente.

E' ovvio osservare che le percentuali riportate nelle colonne  $N_1/N_0$  e  $N_2/N_0$  (ma soprattutto in quest'ultima)

per i casi in cui  $T_1 = 0$  dipendono dall'estensione della sorgente di positroni. Poichè il valore massimo del coefficiente di accettazione  $N_2/N_0$  del sistema ottico è raggiunto per sorgente puntiforme, risulta conveniente riportare le percentuali  $N_2/N_0$  ottenute nei vari casi alla percentuale  $(N_2/N_0)_p$  di particelle catturate nel caso di sorgente puntiforme, fermi restando naturalmente i valori degli altri parametri della sorgente e del sistema ottico di trasporto.

Il metodo da noi usato per calcolare  $(N_2/N_0)_p$  è descritto in appendice. Introducendo nella formula (A.14), ricavata in appendice, i valori di  $R_S$ ,  $H_A$ ,  $H_S$  per i vari casi che compaiono in tabella I, otteniamo il rapporto percentuale  $(N_2/N_0)_p$ %. Allora l'ultima colonna della tabella I ci dà il rapporto tra  $N_2/N_0$  per la sorgente estesa e  $(N_2/N_0)_p$  per la sorgente puntiforme.

Esaminando i risultati dei casi 1,9,10,11,12,13 di tabella I, che differiscono tra loro solo per i valori dei campi  $H_A$  e  $H_S$ , si può concludere che l'accettazione massima  $(N_2/N_0)$  massimo è raggiunta per i valori  $H_A = 17700$  Gauss e  $H_S = 2400$  Gauss, in accordo con quanto previsto nella (1). Questi valori di campo sono i massimi consentiti per le ragioni esposte nella bibl. (1). Dai risultati si ricava altresì che un aumento del valore di  $R_A$  non comporta miglioramenti per l'accettazione, se contemporaneamente non si aumenta il valore di  $R_S$ , che è vincolato dalle dimensioni della zona utile d'accelerazione nel linac. Infine, con i valori di  $H_A$  e  $H_S$  sopracitati dei campi magnetici e con  $R_A = 1$  cm,  $T_1 = 0$ , abbiamo elaborato i risultati al variare di  $T_2$  e  $R_S$ . La quantità  $(N_2/N_0)/(N_2/N_0)_p$  risulta essere una funzione regolare del rapporto  $T_2/R_S$ , che abbiamo graficato in Fig. 5. Tale curva permette di calcolare il rapporto  $(N_2/N_0)/(N_2/N_0)_p$  per qualunque valore di  $R_S$  e di  $T_2$ , semprechè siano soddisfatte le condizioni  $R_A = 1$  cm,  $H_A = 17700$  Gauss,  $H_S = 2400$  Gauss.

Tutti i risultati riportati in tabella I sono relativi a sorgenti circolari con  $T_1 = 0$  e di densità uniforme. Per i casi più interessanti si è pensato di introdurre una ulteriore schematizzazione che approssimi meglio il problema fisico reale: in effetti è più ragionevole pensare che la densità di particelle uscenti dalla targhetta-convertitore vada diminuendo con l'aumentare della distanza del punto sorgente dal centro della targhetta. Perciò una migliore approssimazione si otterrà introducendo una sorgente estesa di positroni che abbia densità uniforme all'interno di una corona circolare. Tale densità varierà invece da corona a corona.

In base alla curva tracciata in Fig. 5 si possono calcolare i coefficienti di accettazione  $(N_2/N_0)\%$  per particelle provenienti da corone circolari di raggi qualsiasi. Infatti, se indichiamo con  $\eta_1$  il valore di  $(N_2/N_0)\%$  per sorgente circolare di raggio  $r_1$  e densità uniforme  $\xi$ ; e con

12.

$\eta_2$  il corrispondente valore per sorgente circolare della stessa densità, ma con raggio  $r_2$  (con  $r_2 > r_1$ ), avremo che:

a) il numero di particelle uscenti dalla corona circolare di raggi  $r_1$  e  $r_2$  e di densità  $\rho$  è dato da

$$n_0 = \pi r_2^2 \rho - \pi r_1^2 \rho ;$$

b) il numero di particelle accettate dall'intero sistema ottico è

$$n_2 = \pi r_2^2 \rho \eta_2 - \pi r_1^2 \rho \eta_1$$

Ne segue che il rapporto percentuale  $(N_2/N_0)\%$  per la corona circolare di raggi  $r_1$  e  $r_2$  può essere espresso così:

$$(4.1) \quad \eta_{1,2} = \frac{\eta_2 r_2^2 - \eta_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Nella tabella II sono riportati a titolo di esempio i risultati ottenuti col metodo Monte Carlo per due casi ( $R_S = 1$  cm e  $R_S = 0,5$  cm, avendo tenuti costanti i valori  $R_A = 1$  cm,  $H_A = 17700$  Gauss,  $H_S = 2400$  Gauss) che interessano per una successiva elaborazione del calcolo (vedi il paragrafo 5). In entrambi i casi la sorgente circolare di raggio  $T_2 = 0,15$  cm è stata suddivisa in 3 corone circolari di raggi rispettivamente (0 - 0,01), (0,01 - 0,075), (0,075 - 0,15).

I risultati che si ottengono nella colonna  $(N_2/N_0)\%$  sono in buon accordo con i valori che si possono ottenere dalla formula (4.1).

Per conoscere l'accettazione del sistema per una sorgente "a corone circolari" occorre ora dare un criterio in base al quale poter pesare i contributi dovuti alle particelle provenienti dalle singole corone circolari. Occorre dare, cioè, la legge secondo cui decresce la densità di particelle (che pure riterremo uniforme all'interno di ogni corona circolare) all'aumentare della distanza dal centro della sorgente. Per questo assumeremo che la distribuzione dei positroni uscenti dal convertitore risulti dalla combinazione della distribuzione (che supporremo gaussiana con larghezza quadratica media  $\Lambda = 0,6$  mm<sup>(x)</sup>), delle particelle nel fascio di elettroni incidenti sul convertitore e della distribuzione, dovuta allo scattering multiplo all'interno della targhetta-convertitore, dei positroni. Supposto che quest'ultima distribuzione sia pure gaussiana<sup>(3)</sup> e calcolata la sua larghezza quadratica media, che è  $\Lambda_1 = 0,84$  mm (se i positroni con energia di 10 MeV subiscono lo scattering multiplo

---

(x) - Ciò corrisponde al 98% di corrente entro un raggio di 1 mm<sup>(2)</sup>.

su  $1/3$  di lunghezza di radiazione), oppure  $\lambda_2 = 1,5$  mm (se i positroni della stessa energia lo subiscono su  $2/3$  di lunghezza di radiazione), avremo come distribuzione dei positroni in uscita dalla targhetta una gaussiana con larghezza quadratica media

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \text{ mm} && \text{per scattering multiplo su } 1/3 \text{ di l.r.} \\ \lambda_2 &= 1,62 \text{ mm} && \text{" " " " } 2/3 \text{ di l.r.} \end{aligned}$$

Indicando con  $\lambda$  indifferentemente uno dei due valori  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , potremo scrivere che il numero di particelle uscenti dalla corona circolare infinitesima di raggi  $r$  e  $r + dr$  è

$$dN(r) = \frac{2N}{\lambda^2} e^{-\frac{r^2}{\lambda^2}} r dr$$

dove  $N$  è il numero totale di particelle uscenti dalla sorgente.

Per una corona circolare di raggi  $r_1$ ,  $r_2$  il numero di particelle uscenti è

$$N \left( e^{-\frac{r_1^2}{\lambda^2}} - e^{-\frac{r_2^2}{\lambda^2}} \right)$$

se moltiplichiamo per il coefficiente di accettazione  $\eta_{1,2}$  definito nella (4.1) relativo alla data corona circolare, avremo il numero di particelle accettate geometricamente dal sistema ottico

$$(4.2) \quad N_{12} = N \eta_{12} \left( e^{-\frac{r_1^2}{\lambda^2}} - e^{-\frac{r_2^2}{\lambda^2}} \right)$$

semprechè  $r_2 - r_1$  sia abbastanza piccolo rispetto a  $\lambda$ .

Se sommiamo su tutte le corone circolari, che compongono la sorgente circolare e che danno un contributo non trascurabile, e dividiamo per  $N$ , otteniamo il coefficiente di accettazione per la sorgente estesa con distribuzione gaussiana.

Riportati al caso di sorgente puntiforme, questi risultati, per i due valori di  $\lambda$  e per diversi valori di  $R_S$ , sono descritti in tabella III, come rapporto:

$$\frac{(N_2/N_0) \text{ corone}}{(N_2/N_0)_p}$$

5. Consideriamo ora che all'interno del solenoide S sia presente un campo elettrico  $E_S$  uniforme e parallelo al campo

magnetico  $H_s$ , che si propaga come un'onda piana lungo l'asse di simmetria del sistema e avente una certa frequenza. Affinchè i positroni siano accelerati occorre che la velocità di propagazione del campo elettrico e quella dei positroni siano uguali. Oltre ad essere accelerata, la particella generica all'interno del solenoide S percorre una traiettoria elicoidale e alla fine del linac si troverà ad avere un'energia diversa da quella della particella che viaggia parallelamente all'asse  $z$ . Ciò in conseguenza del fatto che alla differenza di percorso corrisponde uno sfasamento rispetto alla fase sincrona dell'onda a radiofrequenza, come è rilevato in<sup>(1)</sup>.

D'altra parte occorre tenere presente che soltanto quelle particelle che all'uscita del linac sono contenute in una certa banda di energia e entro un certo angolo solido riescono utili ai fini della loro ulteriore accelerazione.

Da queste considerazioni consegue la necessità di precisare nel senso suddetto il calcolo dei vari coefficienti di accettazione del sistema ottico svolto nella prima parte del lavoro e rivolto esclusivamente a criteri "geometrici" di accettabilità della particella da parte del sistema ottico.

Le equazioni del moto di una particella relativistica in campi elettrico e magnetico paralleli

$$(5.1) \quad \begin{cases} \ddot{x} = g H_s \dot{y} \\ \ddot{y} = -g H_s \dot{x} \\ \ddot{z} = g E_s c \dot{t} \\ c \dot{t}' = g E_s \dot{z} \end{cases}$$

dove il punto sta ad indicare la derivata rispetto a  $s$ , essendo come al solito

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2$$

e dove

$$g = \frac{e}{mc^2}$$

ci permettono di calcolare l'allungamento del percorso della particella generica. Infatti integrando le (5.1) e tenendo conto dell'identità

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2 - (c\dot{t})^2 = -1$$

l'allungamento

$$dl = ds \sqrt{1 + (ct)^2}$$

assume l'espressione

$$(5.2) \quad dl = dz \left\{ 1 + \frac{\frac{\varepsilon^2 \sin^2 \vartheta_0}{m^2 c^4}}{\left( \frac{e E_z}{m c^2} \right)^2 + 2 \frac{e E_z z}{m c^2} \left( 1 - \cos^2 \vartheta_0 + \frac{\varepsilon z}{m^2 c^4} \right)^{1/2} + \cos^2 \vartheta_0 \left( \frac{\varepsilon z}{m^2 c^4} - 1 \right)} \right\}^{1/2}$$

dove  $\varepsilon$  è l'energia che compete alla particella quando la coordinata  $s = 0$  (e quindi, in seguito ad una scelta appropriata delle costanti di integrazione delle (5.1), quando  $z = 0$  e  $t = 0$ );  
 $\vartheta_0$  è l'angolo che la direzione della particella forma con l'asse di simmetria del sistema per  $s = 0$  (vedi sopra).

Considerando gli angoli che le particelle formano con l'asse  $z$  sufficientemente piccoli, potremo porre

$$\cos^2 \vartheta_0 \approx 1 - \vartheta_0^2$$

$$\sin^2 \vartheta_0 \approx \vartheta_0^2$$

supponendo inoltre che

$$\frac{\varepsilon^2}{m^2 c^4} \gg 1$$

potremo riscrivere la (5.2) nel modo seguente

$$dl \approx dz \sqrt{1 + \frac{\vartheta_0^2}{\left( \frac{e E_z z}{\varepsilon} + 1 \right)^2}}$$

che può essere ancora approssimato ( $\vartheta_0^2 \ll 1$ ) in

$$(5.3) \quad dl \approx dz \left( 1 + \frac{\vartheta_0^2}{2 \left( 1 + \frac{e E_z z}{\varepsilon} \right)^2} \right)$$

L'allungamento di percorso al punto  $z$  sarà dato perciò da

$$(5.4) \quad \delta L_z = \int_0^z dl - z = \frac{\vartheta_0^2}{2} \frac{z}{1 + \frac{e E_z z}{\varepsilon}}$$

Se  $\bar{\lambda}$  è la lunghezza d'onda della radiofrequenza, all'allungamento (5.4) corrisponderà uno spostamento



16.

$$(5.5) \quad \delta\varphi_z = \frac{2\pi}{\lambda} \delta L_z = \frac{\pi}{\lambda} \vartheta_0^2 \frac{z}{1 + \frac{eE_s}{\varepsilon} z}$$

Ammettiamo ora che la particella che non spiralizza uscendo dal convertitore sia sfasata di  $\varphi_0$  rispetto al picco dell'onda a radiofrequenza. E' chiaro allora che una particella che spiralizzi avrà alla fine della lente di adattamento A uno sfasamento pari a

$$(5.6) \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{\lambda} \vartheta_0^2 L_A$$

essendo  $L_A$  la lunghezza di A. La (5.6) è stata ricavata dalla (5.5), dove è stato posto  $E_s = 0$ , in quanto nella lente A il campo elettrico non è presente. La  $\vartheta_0$  che entra nella (5.6) è naturalmente l'angolo caratteristico della particella all'ingresso di A.

Per il calcolo della variazione di energia della particella nel solenoide S serve ancora conoscere, in base alla (5.5), l'angolo d'ingresso della particella in S, che chiameremo  $\vartheta_0$ , e l'energia d'ingresso della particella  $\varepsilon$ , rimasta invariata nella lente A.

Se  $L_s$  è la lunghezza del solenoide S, l'incremento di energia subito dalla particella lungo la sua traiettoria in S sarà dato da

$$(5.7) \quad \delta\varepsilon = eE_s \int_0^{L_s} \omega (\varphi - \delta\varphi_z) dz$$

dove  $\varphi$  è definito da (5.6) e  $\delta\varphi_z$  da (5.5) sostituendovi  $\tilde{\vartheta}_0$  a  $\vartheta_0$ . Per comodità si può arrivare a sviluppare la (5.7) nel modo seguente:

$$(5.8) \quad \delta\varepsilon = \omega\varphi_0 \left\{ A \cos \delta\varphi_A - B \sin \delta\varphi_A \right\} + \\ + \sin \varphi_0 \left\{ A \sin \delta\varphi_A + B \cos \delta\varphi_A \right\}$$

dove 
$$\delta\varphi_A = \frac{\pi}{\lambda} \vartheta_0^2 L_A$$

$$A = eE_s L_s - eE_s \frac{\pi^2}{2\lambda^2} \tilde{\vartheta}_0^4 \frac{1}{a^3} \left[ 1 + aL_s - \frac{1}{1+aL_s} - 2 \ln(1+aL_s) \right]$$

$$B = eE_s \frac{\pi}{\lambda} \tilde{\vartheta}_0^2 \frac{1}{a^2} \left[ aL_s - \ln(1+aL_s) \right]$$

$$a = \frac{eE_s}{\varepsilon}$$

Conseguentemente l'energia finale della particella sarà

$$(5.9) \quad \mathcal{E}_f = \mathcal{E} + \delta \mathcal{E}$$

L'altro parametro interessante della particella in uscita del solenoide S è l'angolo formato dalla direzione di moto della particella con l'asse z; esso può essere dedotto immediatamente dalla relazione invariante  $\mathcal{E} \vartheta = \text{const}$ , e perciò avremo

$$(5.10) \quad \vartheta_f = \frac{\mathcal{E} \vartheta_0}{\mathcal{E}_f}$$

dove  $\mathcal{E}_f$  è definito dalla (5.9).

6. Le cose dette ora ci mostrano che al fine di caratterizzare la particella uscente dal solenoide S in energia ( $\mathcal{E}_f$ ) e angolo ( $\vartheta_f$ ), occorre conoscerne tre parametri:  $\mathcal{E}$ , l'energia iniziale all'uscita del convertitore;  $\vartheta_0$  l'angolo iniziale all'uscita del convertitore;  $\vartheta_0$  l'angolo d'ingresso nel solenoide S.

Perciò di ogni particella che nella prima parte del lavoro risultava "geometricamente" accettata dal sistema ottico si sono trascritti i parametri  $\mathcal{E}, \vartheta_0, \vartheta_0$  su scheda. Le schede sono poi state utilizzate nella seconda parte del calcolo, descritta nel paragrafo 5.

Nel corso dei calcoli di questa seconda parte sono risultate utili le seguenti relazioni:

$$L_A = \frac{\pi \mathcal{E}}{e H_A}$$

$$E_{\text{S}} = \frac{\mathcal{E}_f \text{sincr} - E}{e L_S}$$

dove  $\mathcal{E}_f \text{sincr}$  è l'energia finale delle particelle "sincrone" (che non spiralizzano); ed E è l'energia centrale dei positroni all'uscita dal convertitore e ci si è basati sui dati

$$L_S = 40,32 \cdot 10^2 \text{ cm}$$

$$\bar{\lambda} = 10,5 \text{ cm}$$

$$\mathcal{E}_f \text{sincr} = 358 \text{ MeV}$$

$$E = 10,5 \text{ MeV.}$$

Le particelle vengono "incasellate" in una matrice bidimensionale in dipendenza dal valore che assumono i parametri  $\mathcal{E}_f, \vartheta_f$ . Poichè l'energia massima che possono raggiungere

18.

le particelle è evidentemente (particelle viaggianti lungo l'asse z e con  $\varphi_0 = 0$ )

$$E_{fmax} = E_{fsinc} + \Delta E$$

risulta comodo raggruppare le particelle in caselle di dimensioni

$$(E_{fmax}, E_{fmax} - 2 \text{ MeV}); (E_{fmax} - 2 \text{ MeV}, E_{fmax} - 4 \text{ MeV}); \dots$$

in energia. In angolo si assumono le dimensioni (in radianti)

$$(0, 1.5 \cdot 10^{-3}); (1.5 \cdot 10^{-3}, 10^{-3}); (10^{-3}, 1.5 \cdot 10^{-3}); \dots$$

Si ritengono utili quelle particelle che rimangono negli intervalli tra  $E_{fmax}$  e  $E_{fmax} - 4 \text{ MeV}$ , e tra 0 e  $10^{-3}$  radianti. In base ai risultati di questo lavoro può essere calcolata la percentuale di particelle utili per l'iniezione nell'anello sul totale di particelle "geometricamente" accettate dal sistema ottico.

I risultati sono riportati nella tabella IV. In essa sono date le caratteristiche del sistema ottico ( $R_A = 1 \text{ cm}$ ), tenendo fissi i valori di  $H_A = 17700 \text{ G}$ ;  $H_S = 2400 \text{ G}$ ; la energia "centrale" iniziale  $E = 10,5 \text{ MeV}$ , la banda di energia  $+ \Delta E = + 2,5 \text{ MeV}$ ; l'angolo massimo di uscita delle particelle dal convertitore  $\Theta = 0,5 \text{ rad}$ . Sono date altresì le caratteristiche del fascio in uscita dal convertitore ( $T_1 = 0$ ). N rappresenta il numero di particelle esaminate.

Il calcolo viene ripetuto per vari valori di  $\varphi_0$ , fase della particella rispetto all'onda piana accelerante; per  $\varphi_0$  si sono assunti i seguenti valori.

$$- 4^\circ, 0^\circ, 4^\circ, 8^\circ, 12^\circ, 16^\circ.$$

Questa suddivisione permette di valutare, seppure grossolanamente, la percentuale di un fascio che viene accettata in energia e in angolo per l'iniezione. Infatti se consideriamo che il fascio di particelle in uscita dal convertitore ha una lunghezza di  $8^\circ$  (1), possiamo immaginare di suddividerlo in tre sezioni, assegnando a tutte le particelle di una stessa sezione una certa fase  $\varphi_0$ . Le fasi delle particelle delle rimanenti sezioni saranno tali da simulare un fascio di lunghezza, per l'appunto,  $8^\circ$ . Così, centrando il fascio su uno sfasamento, ad esempio, di  $+ 4^\circ$ , per ottenere la percentuale accettata di tutto il fascio terremo conto dei contributi delle particelle con sfasamento  $0^\circ, 4^\circ, 8^\circ$ ; centrando su  $0^\circ$  considereremo le particelle con sfasamento  $- 4^\circ, 0^\circ, 4^\circ$ .

Le ultime due colonne della tabella IV, danno le per-

centuali ottenute centrando il fascio sugli sfasamenti  $+ 4^\circ$  e  $0^\circ$  rispettivamente.

Per i due casi più interessanti nella pratica si sono voluti precisare i risultati, esaminando il contributo dovuto a particelle provenienti da corone circolari della sezione del fascio, convenientemente pesati come è descritto nel paragrafo 4. I risultati sono riportati nella tabella V. Per questi casi sono stati ritenuti costanti i valori  $R_A = 1$  cm,  $H_A = 17700$  Gauss,  $H_S = 2400$  Gauss. Le percentuali di particelle accettate dal sistema sono date per due valori  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  della larghezza quadratica media della gaussiana, secondo cui sono distribuite le posizioni dei positroni all'uscita del convertitore, e rappresentano già la percentuale media di tutto il fascio di positroni, centrato a  $4^\circ$  e  $0^\circ$  rispetto alla fase dell'onda piana.

Le due righe precedute da asterisco danno la percentuale totale accettata per sorgente estesa circolare con distribuzione gaussiana troncata rispettivamente al raggio  $T_2 = 0,3$  cm ( $R_S = 1$  cm) e  $T_2 = 0,15$  cm ( $R_S = 0,5$  cm), nel caso che il pacchetto di positroni abbia una fase centrale rispettivamente di  $4^\circ$  e di  $0^\circ$ .

7. E' conveniente riassumere i risultati più significativi dell'intero calcolo, riportandoli ai valori di intensità di corrente di positroni ottenibili dopo il passaggio delle particelle attraverso il sistema ottico di trasporto.

In base ai risultati sperimentali<sup>(4)</sup> nella (1) è stata elaborata una formula, valida nel caso del problema da noi trattato, che dà l'intensità di positroni  $i_+$  in dipendenza dalle caratteristiche del fascio di  $e^-$  incidenti sulla targhetta-convertitore e dai parametri di accettazione del sistema che rivela le correnti di  $e^+$  all'uscita dal convertitore.

Risulta essere:

$$(7.1) \quad i_+ = 240 \left(1 - \frac{25}{V_-}\right) \Delta V_+ \cdot \Omega \cdot P \quad (\mu A)$$

dove:  $V_-$  è l'energia degli elettroni incidenti (in MeV);  
 $\Delta V_+$  spread di energia dei positroni accettati (in MeV);  
 $\Omega$  angolo solido accettato (in sterad);  
 $P$  potenza di picco del fascio di elettroni sul convertitore (in MW).

Ponendo nella (7.1) i valori

$$V_- = 65 \text{ MeV} \quad \text{e} \quad P = 27,2 \text{ MW,}$$

caratteristici per l'acceleratore di Frascati, al posto della (7.1) si ottiene:

$$(7.2) \quad i_+ = 4020 \Delta V_+ \Omega \quad (\mu A)$$

Occorre aggiungere, a chiarimento dell'espressione che dà l'intensità di positroni, che il termine  $\Delta V_+ \Omega$ , che compare nelle (7.1) e (7.2), più correttamente deve essere inteso come

$$\int \Omega dV_+$$

dove i limiti di integrazione corrispondono alla banda d'energia accettata dal sistema rivelatore.

Secondo le ipotesi fatte circa la funzione di distribuzione dei positroni all'uscita dal convertitore (vedi le formule 3.1 e 3.2), nel nostro caso la  $\Omega$  non presenta la dipendenza dall'energia e perciò risulta

$$(7.3) \quad \int \Omega dV_+ = \Delta V_+ \cdot \Omega = 2 \Delta E \pi \Theta^2$$

Sostituendo nella (7.3) i soliti valori, abbiamo

$$\Delta V_+ \Omega = \frac{5\pi}{4} \quad \text{MeV sterad.}$$

Quindi la corrente di positroni che abbiamo a disposizione all'uscita del convertitore è, secondo la (7.2):

$$(7.4) \quad i_+ = 4020 \frac{5\pi}{4} = 15.8 \text{ mA}$$

Solo una parte di questa corrente viene accettata "geometricamente" dal sistema e precisamente la percentuale indicata nella colonna  $N_2/N_0$  della tabella I per i vari casi.

Di poi, nella nostra schematizzazione, una ulteriore diminuzione della corrente accettata è dovuta ai fenomeni connessi al processo di accelerazione delle particelle, descritti nel paragrafo 5, ed alle limitazioni imposte alle caratteristiche del fascio al momento dell'iniezione nello anello.

Perciò del fascio accettato geometricamente dal sistema soltanto una certa percentuale (che è indicata in tabella IV) sarà utile per l'iniezione.

In tabella VI riportiamo, per i casi più interessanti, i valori assoluti della corrente di positroni utili per l'iniezione. Per tutti i casi si ritengono costanti i seguenti valori:

$$R_A = 1 \text{ cm}; T_1 = 0; H_A = 17700 \text{ Gauss}; H_S = 2400 \text{ Gauss.}$$

Le prime due colonne della tabella VI danno rispettivamente i valori di  $R_S$  e di  $T_2$ ; la terza colonna dà il valore della corrente (in  $\mu A$ ) accettata geometricamente dal sistema ottico. L'ultima colonna dà il valore della corrente utile

di un bunch centrato, rispetto alla fase dell'onda accelerante, a  $4^\circ$  e a  $0^\circ$ .

In tabella VII sono riportati i risultati analoghi per sorgenti con distribuzioni di densità gaussiana.

Ringraziamo F. Amman e R. Andreani per le utili discussioni e i suggerimenti, e M.A. Mencuccini Spano del Servizio Calcoli Numerici dei Laboratori di Frascati per l'elaborazione dei programmi di calcolo.

## APPENDICE.

Calcolo della percentuale  $(N_2/N_0)_p$  di particelle geometricamente accettate dal sistema ottico per sorgente puntiforme.

Nel caso di sorgente puntiforme la distribuzione (3.1) diventa:

$$(A.1) \quad dN = \text{const } dE \vartheta d\vartheta d\alpha$$

valendo per le variabili che qui compaiono i limiti (3.2). Perciò il numero  $N_0$  di particelle uscenti dalla targhetta sarà dato da

$$(A.2) \quad N_0 = \text{const} \int_{E-\Delta E}^{E+\Delta E} dE \int_0^{\Theta} \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\alpha$$

ossia

$$(A.3) \quad N_0 = \text{const } 2\pi \Delta E \Theta^2$$

Per conoscere il numero di particelle accettate geometricamente dalla lente A occorre ripetere il ragionamento fatto nel punto 3b). Avremo allora che le particelle di energia  $\underline{\epsilon} < E$  per essere accettate devono soddisfare alla condizione (3.3), che si trasforma nel caso di sorgente puntiforme nella condizione

$$(A.4) \quad 2r < R_A$$

se si tiene conto del fatto che le particelle descrivono ora un'elica tangente all'asse di simmetria del sistema ottico, per cui si ha  $\rho_0 = r$ .

Per le particelle con energia  $\underline{\epsilon} > E$  vale ancora la condizione

$$(A.5) \quad \underline{\rho} \equiv (\underline{x}^2 + \underline{y}^2)^{1/2} < R_A$$

Il solenoide S accetta geometricamente le particelle che soddisfano alla condizione

$$(A.6) \quad \tilde{r} + \tilde{\rho}_0 < R_S$$

$N_2$  sarà pertanto il numero di particelle che soddisfano con temporaneamente le condizioni (A.4) (oppure A.5, in dipendenza dall'energia della particella) e (A.6).

Sostituendo ad  $r$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{\rho}$  nelle (A.4), (A.5), (A.6) le espressioni che si ottengono tenendo presente che, poiché la sorgente è puntiforme, occorre porre nelle (2.3)  $x(0) = 0$   $y(0) = 0$ , dopo facili manipolazioni le tre condizioni di accettazione si possono scrivere così:

$$(A.7) \quad 2 \frac{\varepsilon \vartheta}{e H_A} < R_A \quad (\varepsilon < E)$$

$$(A.8) \quad 2 \frac{\varepsilon \vartheta}{e H_A} \sin \frac{\pi}{2} \frac{E}{\varepsilon} < R_A \quad (\varepsilon > E)$$

per l'accettazione della lente A;

$$(A.9) \quad 2 \frac{\varepsilon \vartheta}{e H_A} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{E}{\varepsilon} + \left(\frac{H_A}{H_S}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{E}{\varepsilon}} < R_S$$

per l'accettazione della lente S.

Confrontando le condizioni (A.7), (A.8), (A.9), si può facilmente stabilire che, se

$$R_S \leq R_A$$

e

$$H_A > H_S$$

(ciò che si verifica nei casi che ci interessano in pratica), la particella avente parametri che soddisfano la (A.9), soddisfa anche la condizione (A.7) (oppure A.8).

Ciò significa che nel caso di sorgente puntiforme la limitazione all'accettazione dell'intero sistema ottico è quella dovuta al solenoide S. Perciò al fine di determinare il numero di particelle  $N_2$  accettate dall'intero sistema basterà calcolare l'integrale

$$(A.10) \quad N_2 = \text{const} \int_{E-\Delta E}^{E+\Delta E} d\varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_{\max}(\varepsilon)} \vartheta d\vartheta$$

in cui  $\vartheta_{\max}(\varepsilon)$  è il valore di  $\vartheta$  che si ricava dalla condizione (A.9) ossia

$$(A.11) \quad \vartheta_{\max} = \frac{e R_S H_A}{2\varepsilon \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{E}{\varepsilon} + \left(\frac{H_A}{H_S}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{E}{\varepsilon}}}$$

(Ovviamente qui è trattato il caso non banale quando  $\vartheta_{\max} < \theta$ ; se invece  $\vartheta_{\max} \geq \theta$ , il limite superiore dell'integrale in  $\vartheta$  in (A.10) torna ad essere  $\theta$ , e ciò comporta che sia  $N_2 \equiv N_0$ ). Calcolando l'integrale (A.10) si ottiene per  $N_2$  la espressione

$$(A.12) \quad N_2 = \text{const} \frac{(e R_S)^2}{2E} H_A H_S \left\{ \arctg \left[ \frac{H_S}{H_A} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{E}{E-\Delta E} \right) \right] - \right. \\ \left. - \arctg \left[ \frac{H_S}{H_A} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{E}{E+\Delta E} \right) \right] \right\}$$

dove, come al solito, è:



$e$  la carica dell'elettrone  
 $R_s$  il raggio del solenoide S  
 $E^s$  l'energia centrale della banda di energia dei positroni all'uscita dal convertitore.  
 $H_A, H_s$  i campi magnetici di A ed S rispettivamente  
 $\Delta E$  la semibanda d'energia dei positroni.

Il rapporto  $(N_2/N_0)_p$  si scrive quindi così:

$$(A.13) \quad \left(\frac{N_2}{N_0}\right)_p = \frac{(eR_s)^2}{4\pi E \Delta E \Theta^2} H_A H_s \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{H_s}{H_A} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{E}{E - \Delta E} \right) \right] - \operatorname{arctg} \left[ \frac{H_s}{H_A} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{E}{E + \Delta E} \right) \right] \right\}$$

Introducendo i valori, coerentemente a quello che è stato fatto per il calcolo col metodo Monte Carlo, si ha:

$$(A.14) \quad \left(\frac{N_2}{N_0}\right)_p \% = R_s^2 H_A H_s 1,08 \times 10^{-7} \left\{ \operatorname{arctg} \left( -1,27 \frac{H_s}{H_A} \right) - \operatorname{arctg} \left( 3,2 \frac{H_s}{H_A} \right) \right\}$$

In tal modo il rapporto percentuale  $(N_2/N_0)_p$  presenta ora la dipendenza dal valore del raggio  $R_s$  del solenoide S e dai valori dei campi magnetici  $H_A$  e  $H_s$ .

#### BIBLIOGRAFIA.

- (1) - F. Amman e R. Andreani, "L'acceleratore lineare per elettroni e positroni", Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN, LNF-63/46 (1.7.1963).
- (2) - Varian Associates, Technical description, (24.4.1963).
- (3) - B. Rossi, "High Energy Particles". (Prentice-Hall, 1952).
- (4) - T. Aggson, L. Burnod, "Production de positron à l'accélérateur d'Orsay", Labor. de L'Accel. Lineaire, Rapport LAL-27 (Oct. 1962).

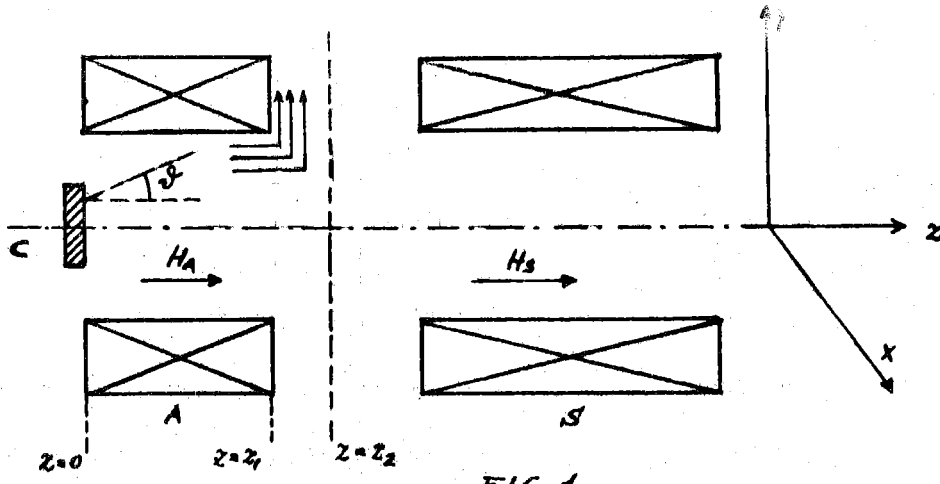


FIG. 1

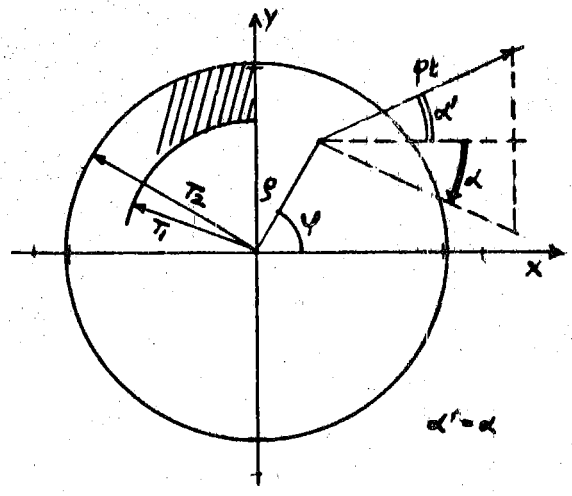


FIG. 2

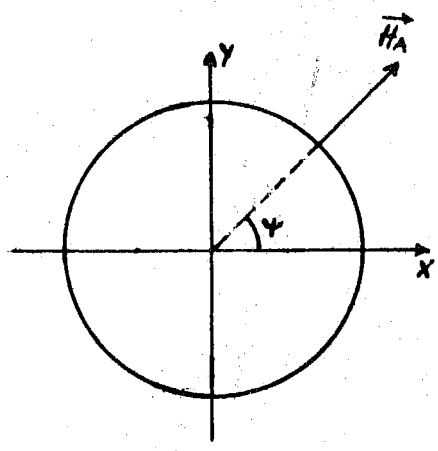


FIG. 3

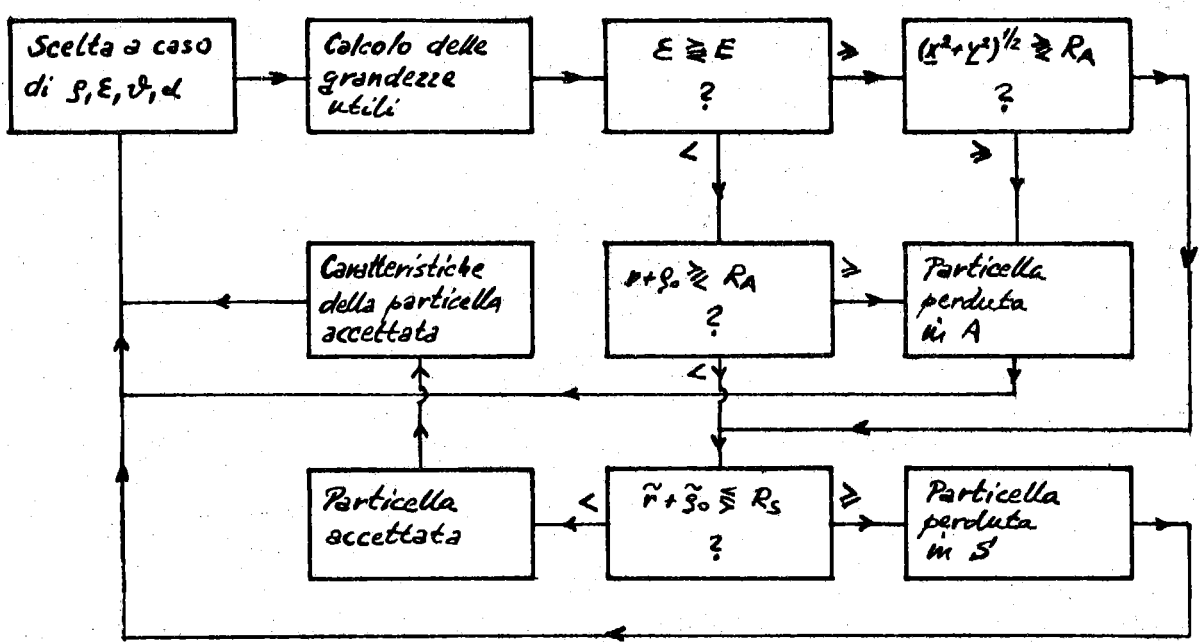


FIG. 4

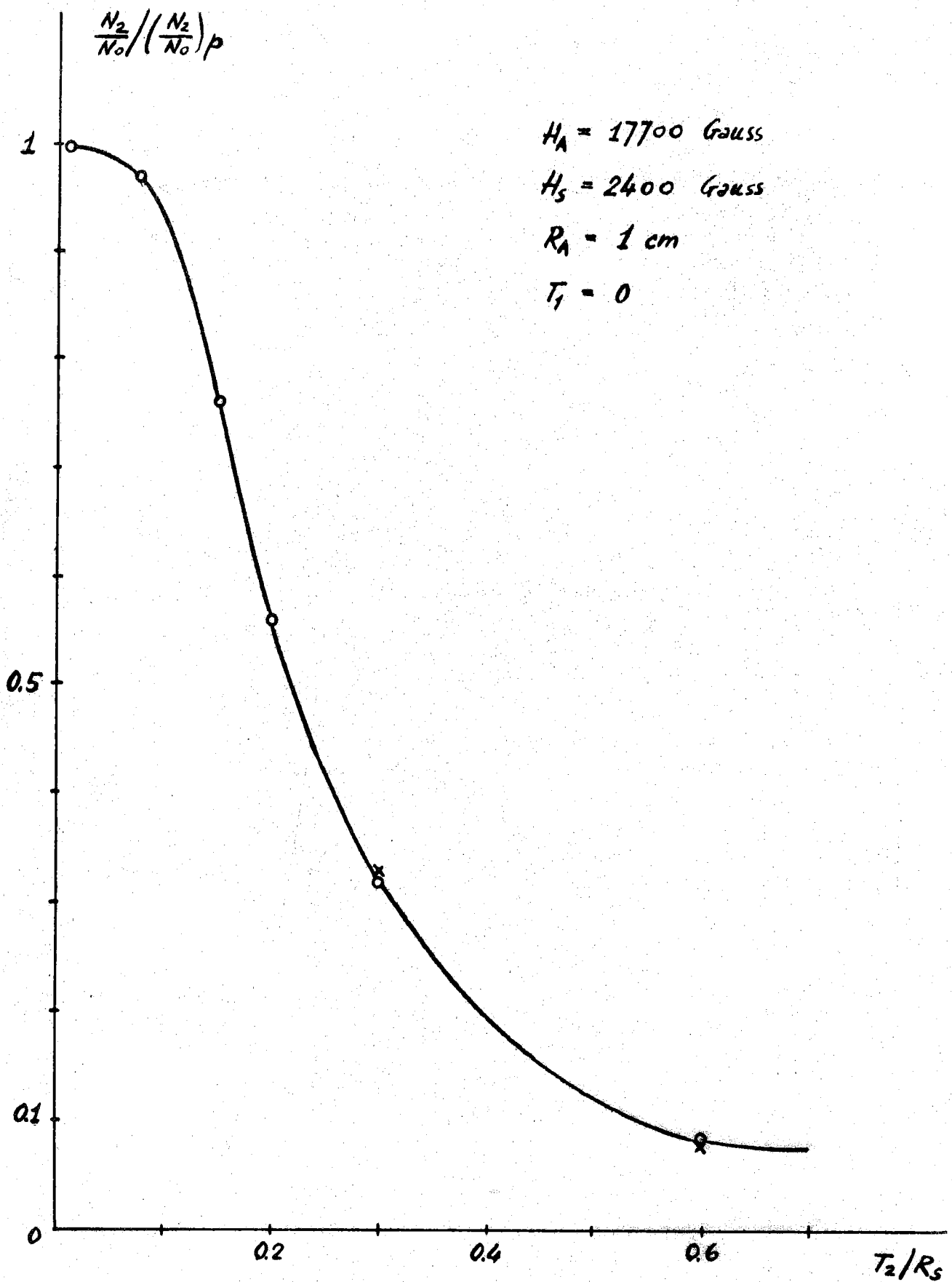


FIG. 5

TABELLA I

	$R_A$ cm	$R_S$ cm	$T_1$ cm	$T_2$ cm	$H_A$ gauss	$H_S$ gauss	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_1/N_0$ %	$N_2/N_0$ %	$\frac{N_2/N_0}{(N_2/N_0)_p}$
1	1	1	0	0,15	17700	2400	7636	2100	652	27,5	8,54	0,76
2	1,5	1	0	0,15	17700	2400	6463	3920	527	60,6	8,15	0,73
3	1	1	0	0,3	17700	2400	10782	2928	392	27,2	3,64	0,33
4	1	0,75	0	0,15	17700	2400	18322	5071	644	27,7	3,51	0,56
5	1	0,5	0	0,15	17700	2400	33890	9233	306	27,24	0,903	0,32
6	1	0,5	0	0,3	17700	2400	7169	1942	16	27,08	0,22	0,079
7	1	1	0	0,075	17700	2400	5458	1523	599	27,9	10,9	0,97
8	1	1	0	0,6	17700	2400	6557	1677	59	24,7	0,9	0,08
9	1	1	0	0,15	15000	2400	11015	2178	866	19,7	7,8	0,86
10	1	1	0	0,15	12500	2400	5042	666	316	13,2	6,26	0,89
11	1	1	0	0,15	17700	1500	6717	1800	257	26,8	3,83	0,49
12	1	1	0	0,15	15000	1500	12008	2362	472	19,6	3,9	0,61
13	1	1	0	0,15	12500	1500	4854	657	160	13,5	3,3	0,64

Accettanze geometriche per sorgenti estese circolari a densità uniforme ( $E = 10,5$  MeV;  $\Delta E = \pm 2,5$  MeV;  $\theta = 0,5$  rad).

$N_1/N_0$  % - accettazione della lente di adattamento  $\Lambda$ .

$N_2/N_0$  % - accettazione dell'intero sistema ottico.

$\frac{N_2/N_0}{(N_2/N_0)_p}$  - accettazione dell'intero sistema ottico normalizzata a quella per sorgente puntiforme.

TABELLA II

	$R_A$ cm	$R_S$ cm	$T_1$ cm	$T_2$ cm	$H_A$ gauss	$H_S$ gauss	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_1/N_0$ %	$N_2/N_0$ %	$\frac{N_2/N_0}{(N_2/N_0)_p}$
1	1	1	0	0,01	17700	2400	14342	3940	1611	27,45	11,23	0,99
2	1	1	0,01	0,075	17700	2400	6767	1857	756	27,44	11,17	0,97
3	1	1	0,075	0,15	17700	2400	5357	1451	423	27,1	7,9	0,71
4	1	0,5	0	0,01	17700	2400	12313	3398	382	27,6	3,1	1
5	1	0,5	0,01	0,075	17700	2400	6295	1803	141	28,6	2,23	0,8
6	1	0,5	0,075	0,15	17700	2400	37017	10230	182	27,6	0,49	0,18

Accettanze geometriche per sorgenti estese a corona circolare di densità uniforme. I simboli hanno il significato definito per la tabella I.

TABELLA III

$\lambda$ (mm)	$R_s$ (cm)	1	0,75	0,5
1		0,72	0,57	0,45
1,62		0,49	0,34	0,25

Accettanze geometriche dell'intero sistema ottico per sorgenti estese con distribuzione gaussiana ( $\lambda$  = larghezza quadratica media) normalizzate alle accettanze per sorgente puntiforme. ( $E = 10,5$  MeV;  $\Delta E = \pm 2,5$  MeV;  $\theta = 0,5$  rad;  $R_A = 1$  cm;  $H_A = 17700$  gauss;  $H_S = 2400$  gauss).

TABELLA IV

$R_s$ cm	$T_2$ cm <sup>2</sup>	N	-4°	0°	4°	8°	12°	16°	4°	0°
1	0,15	1078	22,3	51,2	59,3	34,9	2,3	-	48,5	44,2
1	0,3	821	18,4	39,7	47,6	30,7	2,7	-	39,3	35,2
0,75	0,15	644	31,1	67,1	70	32	-	-	56,4	56,1
0,5	0,15	312	39,1	73,4	64,7	17,6	-	-	51,9	59,1

Percentuale utile per l'iniezione del fascio (di sorgente circolare a densità uniforme) già accettato geometricamente. Il fascio ha una lunghezza in fase di 8° e lo sfasamento del suo punto centrale rispetto all'onda piana accelerante è  $\gamma_0 = 4^\circ$  e  $\gamma_0 = 0^\circ$  rispettivamente. Per tutti i casi, si ha:  $R_A = 1$  cm;  $T_1 = 0$ ;  $H_A = 17700$  gauss;  $H_S = 2400$  gauss;  $E = 10,5$  MeV;  $\Delta E = \pm 2,5$  MeV;  $\theta = 0,5$  rad. Le particelle si definiscono utili se la loro energia finale è contenuta in un intervallo pari all'1% dell'energia massima finale e se la loro inclinazione finale rispetto all'asse del sistema è inferiore a 10<sup>-3</sup> rad.

TABELLA V

$R_s$ cm	$T_1$ cm	$T_2$ cm	$A_1 = 1$ mm		$A_2 = 1,62$ mm	
			4°	0°	4°	0°
1	0	0,01	0,66	0,57	0	0
1	0,01	0,075	24,16	21,9	10,9	9,9
1	0,075	0,15	21,19	19,75	17,75	16,54
1	0,15	0,3	2,2	1,9	8,03	7,13
1	0	0,3	48,2	44,2	36,7	33,6
0,5	0	0,01	0,57	0,72	0	0
0,5	0,01	0,075	25,3	29,6	11,5	13,4
0,5	0,075	0,15	20,3	20,9	17	17,5
0,5	0	0,15	46,2	51,2	28,5	30,9

x

x

Percentuale utile per l'iniezione del fascio già accettato geometricamente proveniente da sorgente circolata con distribuzione gaussiana troncata al raggio  $T_2 = 0,3$  cm (per  $R_s = 1$  cm) e al raggio  $T_2 = 0,15$  cm (per  $R_s = 0,5$  cm).  $A_1, A_2$  sono i due valori assunti per la larghezza quadratica media del fascio. Sono riportati anche i contributi parziali convenientemente pesati di corone circolari. Il punto centrale del fascio ha uno sfasamento  $\gamma_0 = 4^\circ$  e  $\gamma_0 = 0^\circ$ . I valori dei rimanenti parametri sono quelli definiti per la tabella IV.

TABELLA VI

$R_s$ (cm)	$T_2$ (cm)	$i_{geom}^+$ ( $\mu A$ )	$i_+$ ( $\mu A$ )	
			$4^\circ$	$0^\circ$
1	0,15	1350	692	630
1	0,3	575	226	202
0,75	0,15	555	313	310
0,5	0,15	143	74	85
1	0	1770	1173	1010
0,5	0	443	254	318

Valori assoluti della corrente accettata geometricamente ( $i_{geom}^+$ ) e della corrente utile ( $i_+$ ) calcolata per due diversi sfasamenti ( $\varphi = 4^\circ$  e  $\varphi = 0^\circ$ ) del punto centrale del fascio. I dati sono relativi a sorgenti circolari a densità uniforme e a sorgente puntiforme. I parametri non definiti hanno i segg. valori:  
 $R_A = 1$  cm;  $T_1 = 0$ ;  $H_A = 17700$  gauss;  $H_s = 2400$  gauss  
 $E = 10,5$  MeV;  $\Delta E = \pm 2,5$  MeV;  $\theta = 0,5$  rad.

TABELLA VII

$R_s$ cm	$T_2$ cm	$\Delta$ mm	$i_{geom}^+$ $\mu A$	$i_+$ ( $\mu A$ )	
				$4^\circ$	$0^\circ$
1	0,3	1	1257	612	560
1	0,3	1,62	867	318	292
0,5	0,15	1	199	92	102
0,5	0,15	1,62	111	31	34

Valori assoluti della corrente accettata geometricamente ( $i_{geom}^+$ ) e della corrente utile ( $i_+$ ) calcolata per due diversi sfasamenti ( $\varphi = 4^\circ$  e  $\varphi = 0^\circ$ ) del punto centrale del fascio. I dati sono relativi a sorgenti circolari con distribuzione di densità gaussiana, di larghezza quadratica media  $\Delta$ .  
 I parametri non definiti hanno i valori precisati per la tabella VI.